Практикум из Математике 2 – 14. 5. 2022.

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Име и презиме:	Број индекса:

1.	2.	3.	4.	5.	Сума 1

Сума 1	Сума 2	Сума 3	Сума

Тест траје 45 минута. Сваки задатак вреди 1 бод.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$;

(б) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$.

2. Одредити неодређени интеграл $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

3. Одредити вредност реалног параметра m тако да неодређени интеграл

$$\int \frac{mx-1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

буде рационална функција, а затим одредити тај интеграл.

4. Заокружити слова испред интеграла биномних диференцијала који су елементарно решиви:

(а) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{2x^2+3}}\,\mathrm{d}x$; **(б)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x$

(в) $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{2x^2+3}}\,\mathrm{d}x$; **(г)** $\displaystyle\int x^4\sqrt[3]{2x^2+3}\,\mathrm{d}x$.

(д) ниједан од понуђених интеграла.

5. Вредност одређеног интеграла

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

једнака је:

(а) $\ln 2$; **(б)** $\ln 3$; **(в)** $\ln 4$; **(г)** 1;

(д) ниједан од понуђених одговора.

6.	7.	8.	9.	10.	Сума 2

6. Одредити вредност параметра $a \in \mathbb{R}^+$ тако да важи $5\int_{-a}^{a}(|x| \operatorname{arctg} x + x^4)\mathrm{d}x = 2$.

7. Израчунати величину површине дела равни који ограничавају криве $y = x^2 - 2x$ и $y = 4 - x^2$.

8. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 5}.$$

9. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' = \dfrac{x + y}{x}$.

10. Заокружити слова испред оних интегралних кривих диференцијалне једначине

$$(x + 1)\,\mathrm{d}x + (y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$$

које пролазе кроз тачку $(1, 1)$:

(а) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$;

(б) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$;

(в) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$;

(г) $x^2 + y^2 + 2(x + y) = 4$;

(д) $x^2 + y^2 + 2(x - y) = 2$;

(ђ) ниједна од претходних кривих није интегрална крива дате диференцијалне једначине која пролази кроз тачку $(1, 1)$.

11.	12.	13.	14.	15.	Сума 3

11. Одредити реалне константе a и b тако да $y_p = a\sin x + b\cos x$ буде једно партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y'' - 2y' + y = 2\sin x.$$

12. Одредити опште решење нехомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима

$$y'' - 2y' + y = 2\sin x.$$

13. Испитати да ли је ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7}}\right)$$

конвергентан. Детаљно образложити одговор.

14. Одредити полупречник конвергенције степеног реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n\, n!}{n^{n+1}} x^n.$$

15. Испитати да ли је тачна једнакост

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = \frac{4}{7}.$$

Детаљно образложити одговор.

– Решења –

1. Имамо да је:

(а) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

(б) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{rl} t = & \cos x \\ \mathrm{d}t = & -\sin x\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2. Интеграл решавамо методом парцијалне интеграције:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = x & \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \operatorname{tg} x \end{array} \right\} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

3. За $m = 0$ добијамо интеграл $\displaystyle -\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + C.$

4. Интеграл биномног диференцијала $\displaystyle\int x^m\,(a\,x^n + b)^p\,\mathrm{d}x$, за $a, b \in \mathbb{R}$ и $m, n, p \in \mathbb{Q}$, је елементарно решив ако и само ако важи:

1° $\quad p \in \mathbb{Z}$;

2° $\quad \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ или

3° $\quad \dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$.

Према томе, тачни одговори су (а), (б) и (в).

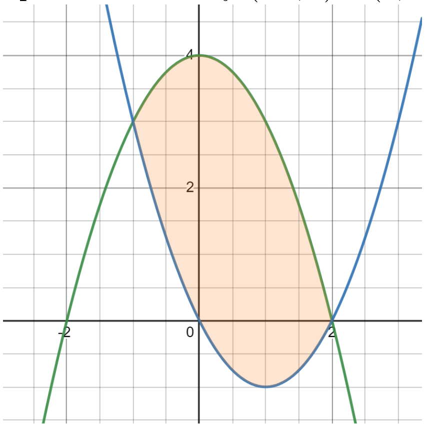
5. Функција $f(x) = e^x$ је монотоно растућа на сегменту $[0, \ln 3]$. Увођењем смене $t = e^x$ добијамо $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$. Применом Њутн–Лајбницове формуле имамо да је $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln|t+1|\,\Big|_1^3 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$. Тачан одговор је (а).

6. Ако је f непрекидна и непарна функција на сегменту $[-a, a]$, онда је $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Функција $f(x) = |x| \operatorname{arctg} x$ непрекидна је и непарна на сегменту $[-a, a]$, као производ непрекидне и парне функције $|x|$ и непрекидне и непарне функције $\operatorname{arctg} x$. Према томе, важи $\displaystyle\int_{-a}^{a} |x| \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = 0$. Искористићемо особину линеарности одређеног интеграла да решимо задатак до краја. Имамо да је $\displaystyle 5\int_{-a}^{a} (|x|\,\operatorname{arctg} x + x^4)\mathrm{d}x = 5\int_{-a}^{a} |x|\,\operatorname{arctg} x \mathrm{d}x + 5\int_{-a}^{a} x^4 \mathrm{d}x$, односно да је

$$5\int_{-a}^{a} (|x|\,\operatorname{arctg} x + x^4)\mathrm{d}x = 5\int_{-a}^{a} x^4\mathrm{d}x = x^5\Big|_{-a}^{a} = a^5 - (-a)^5 = 2a^5.$$

Једнакост $2a^5 = 2$ имплицира да је $a = 1$.

7. Одредимо прво тачке пресека парабола $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2\,x$. Имамо да апсцисе пресечних тачака задовољавају квадратну једначину $4 - x^2 = x^2 - 2\,x$, тј. $x^2 - x - 2 = 0$. Према томе, пресечне тачке су $(-1, 3)$ и $(2, 0)$.



Тражена величина једнака је вредности итеграла

$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^{2} \left[(4 - x^2) - (x^2 - 2x)\right]\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} \left(4 + 2x - 2x^2\right)\, \mathrm{d}x \\ &= \left(4x + x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{2} \\ &= 8 + 4 - \frac{16}{3} + 4 - 1 - \frac{2}{3} \\ &= 15 - 6 = 9. \end{aligned}$$

8. Свођењем квадратног тринома у имениоцу подинтегралне функције на канонски облик имамо да је

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2 + 1}\,.$$

Добијени интеграл решавамо уводећи смену $t = x + 2$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& x + 2 \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}\,(x+2) = \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\,(x+2) + C.$$

Према томе, имамо да је $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 5} = \lim_{a \to +\infty} \operatorname{arctg}\,(a+2) - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

9. У питању је хомогена диференцијална једначина првог реда. Сменом $z = \dfrac{y}{x}$ добијамо диференцијалну једначину која раздваја променљиве. Имамо да је $y = x\,z$ и $y' = z + x\,z'$. Полазна једначина је еквивалентна једначини $z + x\,z' = 1 + z$, односно $\mathrm{d}\,z = \dfrac{\mathrm{d}\,x}{x}$. Интеграљењем добијамо $z = \ln|x| + C$, тј. $y = x\,\ln|x| + C\,x$.

10. Опште решење диференцијалне једначине првог реда која раздваја променљиве

$$(x+1)\,\mathrm{d}x + (y-1)\,\mathrm{d}y = 0$$

је $(x+1)^2 + (y-1)^2 = C$. Интегрална крива која пролази кроз тачку $(1,1)$ је $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$, што се још може записати и као $x^2 + y^2 + 2(x - y) = 2$. Тачни одговори су (б) и (д).

11. Први и други извод функције $y_p = a\sin x + b\cos x$ су

$$y_p' = a\cos x - b\sin x \quad \text{и} \quad y_p'' = -a\sin x - b\cos x.$$

Заменом датих израза у једначину $y'' - 2y' + y = 2\sin x$ добијамо

$$-a\sin x - b\cos x - 2a\cos x + 2b\sin x + a\sin x + b\cos x = 2\,\sin x,$$

односно $2b\sin x - 2a\cos x = 2\sin x$, одакле следи да је $b = 1$ и $a = 0$. Одговарајуће партикуларно решење дате једачине је $y_p = \cos x$.

12. Опште решење нехомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима $y'' - 2y' + y = 2\sin x$ једнако је збиру општег решења одговарајуће хомогене диференцијалне једначине $y'' - 2y' + y = 0$ и произвољног партикуларног решења нехомогене. Опште решење хомогене диференцијалне једначине $y'' - 2y' + y = 0$ одређујемо помоћу карактеристичне једначине $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Једини корен дате карактеристичне једначине је $\lambda = 1$ (вишеструкости два). Одговарајућа партикуларна решења су $y_1 = e^x$ и $y_2 = x\,e^x$. Опште решење хомогене диференцијалне једначине $y'' - 2y' + y = 0$ је $y_h = C_1\,y_1 + C_2\,y_2 = C_1\,e^x + C_2\,x\,e^x$. Видели смо у претходном задатку да је једно партикуларно решење нехомогене диференцијалне једначине $y_p = \cos x$. Према томе, њено опште решење је $y = y_h + y_p = C_1\,e^x + C_2\,x\,e^x + \cos x$.

13. За општи члан реда важи $\sin\left(\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7}}\right) = \sin\left(\dfrac{2}{n^{\frac{5}{4}}}\right) \sim \dfrac{2}{n^{\frac{5}{4}}}$, $n \to +\infty$, одакле на основу другог поредбеног критеријума следи да су редови $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7}}\right)$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{\frac{5}{4}}}$ еквиконвергентни. Како за ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{\frac{5}{4}}}$ знамо да конвергира $\left(\text{јер је } \dfrac{5}{4} > 1\right)$, следи да конвергира и ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7}}\right)$.

14. Нека је $a_n = \dfrac{(-3)^n\,n!}{n^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n\,3^n\,n!}{n^{n+1}}$. Имамо да је

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{3^n\,n!}{n^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+2}}{3^{n+1}(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+2}}{3\,n^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

одакле налазимо да је тражени полупречник конвергенције датог реда

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{e}{3}.$$

15. Дати ред је геометријски са количником $-\dfrac{3}{4} \in (-1, 1)$, те он конвергира. Према познатој формули за суму геометријског реда имамо да је $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = \frac{-\frac{3}{4}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}} = -\frac{3}{7}$ одакле закључујемо да наведена једнакост није тачна.